V-13 (1 h 6 min) 24-Marzo-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Trasformada de Fourier (límite continuo)** **Delta de Dirac**

(VII) de resumen de V-10: Función periódica $\boldsymbol{\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n(t)\ e^{iK_n\,x}} \in \mathbb{R}$ $(\boldsymbol{K_n} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{L}} n \ \rightarrow K_{-n} = -K_n)$

(VIII) de resumen de V-10: En general $C_n(t) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \phi(x,t)\, e^{-i\,K_n\,x}\, dx$ cumplen: $C_{-n}(t) = C_n^*(t)$

<u>Pretendemos generalizar las expresiones anteriores para periodo L → ∞ , es decir, funciones ϕ no periódicas</u>.
No tendremos en cuenta la dependencia del tiempo, es decir, consideramos el instante t = 0

Una integral se puede aproximar a un sumatorio → El sumatorio de (VII) lo convertiremos en una integral.
En el sumatorio el índice variable es ***"n"*** que hace variar a $\boldsymbol{K_n} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{L}} n$ y a los coeficientes $\boldsymbol{C_n}$.
Existe correspondencia biunívoca entre los valores de $\boldsymbol{n}$ y de $\boldsymbol{K_n}$ → Usaremos <u>K como variable continua de integración que se extiende desde -∞ a +∞</u> (igual que *"n"*). Al variar K_n, varían los coeficientes que expresaremos $\boldsymbol{C_n \equiv C(K_n)}$.

Véase en el video 12 el ejemplo de la "función caja": Calculamos $C_n(0) = \frac{1}{L}\int_{-1}^{+1} 1 \cdot\ e^{-i\,K_n\,x}\, dx = \frac{\boldsymbol{2\,\sin K_n}}{\boldsymbol{K_n L}} = \boldsymbol{C(K_n)}$

Como $K_n = \frac{2\pi}{L} n$ cuando ***"n"*** aumenta en una unidad se produce un $\Delta K_n = \frac{2\pi}{L}$. Cuando $L \rightarrow \infty \implies \Delta K_n \rightarrow 0 \equiv dK$
Para que en el sumatorio de (VII) aparezca $\Delta K_n = \frac{2\pi}{L}$ y podamos asimilarlo a la forma de una integral, lo ponemos:

$$\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C(K_n)\ e^{iK_n\,x}\, \Delta K_n \frac{L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} L\, C(K_n)\ e^{iK_n\,x}\, \Delta K_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(K_n)\ e^{iK_n\,x}\, \Delta K_n$$

Donde hemos llamado $g(K_n) = L\, C(K_n)$ Es una función que, aunque L→∞ , converge en un número finito.

En efecto, podemos comprobarlo en el ejemplo anterior de la "función caja": $g(K_n) = L\, C(K_n) = \frac{2\,\sin K_n}{K_n}$
Cuando $L \rightarrow \infty \implies K_n \rightarrow 0$ Hacemos el límite: $\lim_{K_n \rightarrow 0} \frac{2\,\sin K_n}{K_n}\ (por\ L\acute{}Hopital) = \lim_{K_n \rightarrow 0} 2\cos K_n = 2$

Solo queda sustituir el sumatorio anterior por una integral, quitar el subíndice a K_n para que sea K la variable continua de intgración y sustituir ΔK_n por dK:

$$\boldsymbol{\phi(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(K)\ e^{iK\,x} dK}$$

Para hallar la función coeficiente ***g(K)*** utilizamos la expresión (VIII):

$$L\, C_n(t) = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \phi(x,0)\, e^{-i\,K_n\,x}\, dx \quad \implies \quad \boldsymbol{g(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,0)\ e^{-iK\,x} dx}$$

Llamamos $\boldsymbol{\tilde{\phi}\,(K) = \frac{g(K)}{\sqrt{2\pi}}}$, y así las expresiones anteriores, se suelen expresar de una forma más fácil de recordar:

$$\boldsymbol{\phi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}\,(K)\ e^{iK\,x} dK} \qquad \textbf{(I)}$$

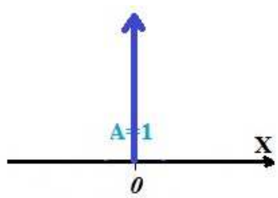
$$\boldsymbol{\tilde{\phi}\,(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,0)\ e^{-iK\,x} dx} \qquad \textbf{(II)}$$

Estas son las formulas de la TRANSFORMADA DE FOURIER válida para toda función

<u>Delta de Dirac</u>

Podría definirse como una función (abusando del lenguaje) que cumple:

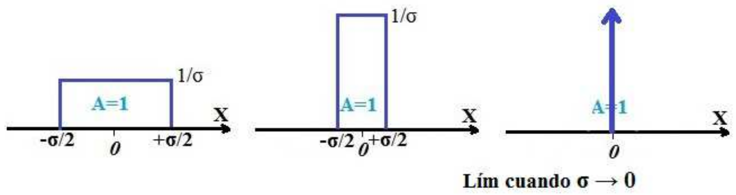
$$\boldsymbol{\delta(x) = \begin{cases} \infty & si\ x = 0 \\ 0 & \forall x \neq 0 \end{cases}} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & si\ x = a \\ 0 & \forall x \neq a \end{cases}}$$



El área que encierra es la unidad: $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\delta(x) dx = 1}$

En realidad la Delta de Dirac no es una función, sino el límite al que se llega con un conjunto de funciones. Para entender esto vamos a ver cómo se llega a la Delta de Dirac estrechando y llevando al límite una función "tipo caja".
Sea la función siguiente:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma}} & si \quad -\dfrac{\sigma}{2} \leq x \leq +\dfrac{\sigma}{2} \\ \mathbf{0} & \forall x \; fuera\; del\; intervalo \end{cases}$$



Para todo valor de σ, el área del rectángulo es:

$$\boldsymbol{A = \sigma \cdot \frac{1}{\sigma} = 1}$$

<u>Vamos a expresar la "función caja" con la transformada de Fourier y así llegar, en el caso límite, a otra expresión para la delta de Dirac</u>:

En primer lugar aplicamos **(II)** para hallar la "función coeficiente":

$$\tilde{\phi}\,(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)}\; e^{-iK\,x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma}}\; e^{-iK\,x} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} e^{-iK\,x}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-iK\,x}}{-iK}\right]_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} =$$

$$= \frac{1}{K\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-iK\frac{\sigma}{2}} - e^{+iK\frac{\sigma}{2}}}{-i}\right) = \frac{1}{K\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-i\sin K\frac{\sigma}{2} - i\sin K\frac{\sigma}{2}}{-i}\right) = \frac{2\sin K\frac{\sigma}{2}}{K\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; \frac{\sin K\frac{\sigma}{2}}{K\frac{\sigma}{2}}$$

Aplicamos ahora **(I)** para expresar la transformada de Fourier de la "función caja":

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\tilde{\phi}\,(K)\; e^{iK\,x} dK} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; \frac{\sin K\frac{\sigma}{2}}{K\frac{\sigma}{2}}\; e^{iK\,x} dK = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin K\frac{\sigma}{2}}{K\frac{\sigma}{2}}\right) e^{iK\,x} dK$$

Si consideramos que <u>σ es cada vez más pequeña, en el límite,</u> el paréntesis del interior de la integral tenderá a 1.

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\sin K\frac{\sigma}{2}}{K\frac{\sigma}{2}} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iK\,x} dK} \qquad \textbf{(III)}$$

Podemos considerar **(III)** como "definición de andar por casa" de la Delta de Dirac, que será útil en QFT para resolver ecuaciones diferenciales y hallar el "propagador"

La Delta de Dirac tiene muchas propiedades, o se puede definir de muchas otras formas. Una de ellas es aquella que introducida dentro de la integral de una función ***h(x)*** hace que resulte ***h(a)***. Se comprende intuitivamente que únicamente cuando ***x = a*** el interior de la integral es distinto de cero, luego el único valor de la función ***h(x)*** que contribuye al sumatorio de la integral es ***h(a)***:

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot \delta(x-a) \cdot dx = h(a)} \qquad \textbf{(IV)}$$

Se puede tener una Delta de Dirac con una función ***g(x)*** en su interior:

$$\boldsymbol{\delta[g(x)]} = \begin{cases} \boldsymbol{\infty \;\; si\; x = x_0} \\ \boldsymbol{0 \quad \forall x \neq x_0} \end{cases} \quad \boldsymbol{siendo\;\; g(x_0) = 0}$$

Si hay varios valores de $\boldsymbol{x_0}$ que hacen $\boldsymbol{g(x_0) = 0}$, y siendo $\boldsymbol{|g'(x_0)|}$ el valor absoluto de la derivada, evaluada en cada $\boldsymbol{x_0}$, se puede demostrar que se cumple la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot \delta[g(x)] \cdot dx = \sum_{x_0} h(x_0) \frac{1}{|g'(x_0)|}} \qquad \textbf{(V)}$$

Si la funciones son de varias variables **{** $\mathbf{x_i}$ **}**, tales que los valores $\boldsymbol{x_{i0}}$ son los que anulan $\boldsymbol{h(x_{i0}) = 0}$, lo equivalente a la expresión **(V)** sería poner la inversa del valor absoluto del Jacobiano en lugar de la inversa del valor absoluto de la derivada $\boldsymbol{g'(x_0)}$:

$$\boldsymbol{\iint_{-\infty}^{+\infty} h(x_i) \cdot \delta[g(x_i)] \cdot dx_i = \sum_{x_{i0}} h\left(x_{i_0}\right) \frac{1}{|J(x_{i_0})|}} \qquad \textbf{(VI)}$$